

*Гульманов Н.К.¹

¹ Назарбаев Интеллектуальная школа естественно-математического направления г. Караганды

¹Казахстан, Караганда

¹ ORCID: 0000-0003-0020-3441

* gulmanov.nurtay@gmail.com

ФОРМИРОВАНИЕ НАВЫКОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ЧАСТИЧНО-ПОИСКОВОГО МЕТОДА

Аннотация

В статье рассматривается формирование у учащихся 10 класса навыка построения модели решения олимпиадной математической задачи. В исследованиях по решению нестандартных задач чаще оценивается общий результат, тогда как выбор метода, планирование, проверка условий и полнота доказательства рассматриваются отдельно значительно реже. Цель исследования состояла в том, чтобы проследить изменения этих компонентов при систематическом использовании частично-поискового метода и формирующего оценивания. Исследование проводилось в формате Action Research в одной группе из 24 учащихся 10 класса в течение 2024–2025 учебного года. Были использованы входная и итоговая диагностика, анализ письменных решений, анкеты, полуструктурированные интервью, педагогическое наблюдение и диагностическая рубрика из пяти показателей. В ходе циклов применялись каркас решения, задания с различной степенью поддержки, парная взаимопроверка, групповое восстановление алгоритмов и формирующая обратная связь. Средний балл по рубрике увеличился с 6,4 до 11,9 из 15. Доля учащихся, способных обосновать выбор метода, выросла с 29 до 71%, а доля учащихся, проверяющих условия применимости и случай равенства, с 17 до 63%. Полное доказательство на итоговом этапе представили 58% учащихся против 21% на старте. Анализ письменных работ и наблюдений показал, что быстрее всего менялись выбор метода и план решения, тогда как завершение строгого доказательства оставалось наиболее трудным компонентом. Полученные данные описывают положительную динамику в данной группе. Из-за отсутствия контрольной группы они не рассматриваются как доказательство того, что изменения вызваны только использованным педагогическим подходом.

Ключевые слова: Action Research, олимпиадная математика, частично-поисковый метод, модель решения, математическое рассуждение, формирующее оценивание, неравенства.

Введение. Олимпиадная подготовка по математике требует не только знания отдельных методов, но и умения организовать ход решения. Учащемуся необходимо понять структуру условия, наметить возможные пути, выбрать подходящий метод, проверить ограничения и довести рассуждение до полного доказательства. Эта логика согласуется с классической схемой Дж. Пойа, где решение строится через понимание задачи, составление плана, его выполнение и последующую проверку [1]. А. Шёнфельд показывает, что существенную роль играет также самоконтроль учащегося в процессе решения. Важны оценка выбранной стратегии и своевременное решение о ее продолжении или смене [2].

Современные исследования дополняют эту картину. Систематический обзор работ о доказательстве в школьной и университетской математике показывает, что больше внимания уделяется взаимодействию учащегося с математическим содержанием. Исследований, в которых одновременно рассматриваются действия учителя, деятельность учащихся и качество доказательства, заметно меньше [3]. В исследовании одаренных учащихся показано, что использование представлений и моделей может сочетаться с трудностями при переходе к строгой математической записи [4]. Обзор программ для математически одаренных школьников выделяет сложные и открытые задачи, сотрудничество учащихся и активную поддержку учителя как характерные элементы такой подготовки [5].

При этом в доступных исследованиях сравнительно редко прослеживается, как меняются отдельные действия учащегося в процессе олимпиадного решения. Общий результат часто оценивается как единое целое. В таком случае трудно определить, возникает ли основная проблема при анализе условия, выборе метода, планировании, проверке условий или оформлении доказательства. В настоящей работе эти составляющие рассматриваются

отдельно. Такой подход позволяет точнее связать наблюдаемые затруднения с конкретными способами педагогической поддержки.

Исходная проблема была выявлена в ходе олимпиадной подготовки учащихся 10 класса. Письменные работы показывали, что при знании отдельных методов учащиеся нередко начинали решение с бессистемных преобразований. Метод часто выбирался по внешнему сходству, условия его применения не проверялись, а доказательство оставалось незавершенным. Под моделью решения в статье понимается осознанная последовательность взаимосвязанных действий. В нее входят анализ структуры и ограничений задачи, выбор и обоснование метода, планирование шагов, контроль условий применимости и случая равенства, а также завершение связного доказательства. Такое понимание опирается на эвристическую логику решения [1, с. 5–14; 2, с. 15–26] и современные исследования математического доказательства [3, с. 47–49; 4, с. 14].

В качестве методической основы был выбран частично-поисковый метод. Учитель не сообщал готовый алгоритм, а направлял поиск с помощью вопросов, подсказок и обратной связи. Такой вариант отличается от полностью самостоятельного открытия без поддержки. Метаанализ Л. Альфиери с соавторами показывает, что управляемый поиск, сопровождаемый подсказками и объяснениями, дает более надежные результаты, чем обучение без такой поддержки [6]. Исследования по математическому образованию также связывают вопросы, направленные на планирование и самоконтроль, с улучшением организации решения [7]. Поэтому самостоятельный поиск сочетался с ясными критериями качества и постепенным уменьшением помощи учителя.

Цель исследования — разработать и апробировать систему обучения олимпиадной математике, направленную на развитие у учащихся 10 класса навыка построения модели решения средствами частично-поискового метода.

Исследовательский вопрос был сформулирован следующим образом: Какие изменения наблюдаются в анализе структуры задачи, выборе метода, планировании, проверке условий и полноте доказательства при систематическом использовании частично-поисковых заданий и формирующего оценивания, а также какие элементы организации работы связаны с этими изменениями по данным наблюдений и письменных работ?

Гипотеза исследования состояла в том, что систематическое использование частично-поисковых заданий, в которых учащийся сначала продумывает и проверяет ход решения, будет сопровождаться более осознанным выбором метода и более полным доказательством. Ожидалось также уменьшение числа бессистемных преобразований и более внимательная проверка условий применимости. Вместе с тем формат Action Research не позволяет установить, что все изменения вызваны только одним педагогическим фактором. Поэтому результаты рассматриваются как динамика конкретной учебной группы.

Методы и материалы. Исследование было проведено в формате Action Research, предполагающем последовательные циклы планирования, действия, наблюдения и рефлексии [8]. Оно проводилось в течение 2024–2025 учебного года в группе из 24 учащихся 10 класса, посещавших элективный курс по олимпиадной математике. Выборка носила целевой характер. Учитель одновременно выполнял роль исследователя, что соответствует логике Action Research, но требует учитывать возможность субъективности при наблюдении и оценивании.

Объект исследования — процесс обучения математике учащихся 10 класса в условиях олимпиадной подготовки. Предмет исследования — развитие навыка построения модели решения математической задачи средствами частично-поискового метода. При анализе рассматривались письменные решения и зафиксированные эпизоды учебной деятельности, которые можно было соотнести с показателями диагностической рубрики.

Материалами исследования выступили письменные решения учащихся, диагностические работы, анкеты, результаты полуструктурированных интервью, листы наблюдения, постеры групповой работы, портфолио решений и рефлексивные записи учителя. Материалы авторской программы «Schola Mathematicorum» использовались как источник задач и как

организационная основа занятий. Сама программа не рассматривалась как отдельный объект проверки эффективности в данной статье.

Дизайн исследования включал диагностический этап и три последовательных цикла. Каждый цикл строился по логике планирования, действия, наблюдения и рефлексии. После анализа письменных работ и наблюдений уточнялись способы поддержки, которые использовались на следующем этапе. Общий дизайн исследования представлен в таблице 1.

Таблица 1. Дизайн исследования

Цикл	Сроки	Основная задача	Инструменты
Диагностический этап	сентябрь 2024 г.	Выявить типичные затруднения учащихся при решении нестандартных задач	Входная работа, анкета, анализ письменных решений, наблюдение
Цикл 1	октябрь-ноябрь 2024 г.	Ввести каркас модели решения и минимальный стандарт доказательства	Частично-поисковые задания, карточки-подсказки, лист наблюдения
Цикл 2	декабрь 2024 г. – февраль 2025 г.	Усилить перенос способа решения на новые темы через парную и групповую работу	Постеры, взаимооценивание, протокол урока, мини-интервью
Цикл 3	март-апрель 2025 г.	Систематизировать результативные методические решения и проверить перенос модели решения на задачи разных типов	Итоговая диагностика, портфолио решений, аналитическая матрица, рефлексивные записи

Источник: разработано автором.

Для научного обоснования используемых приемов было определено, какое учебное действие поддерживает каждый из них. Каркас решения помогал вынести планирование и самоконтроль в явную форму. Карточки-подсказки направляли самостоятельный поиск, не заменяя его готовым алгоритмом. Диагностическая рубрика и чек-листы задавали понятные требования к доказательству. Парная и групповая работа использовалась для обсуждения выбора метода и обнаружения логических пропусков. Теоретические основания этих решений представлены в таблице 2.

Таблица 2. Теоретико-методическое обоснование педагогического вмешательства

Компонент	Теоретическое основание	Функция в модели решения
Каркас решения и предварительная фиксация идеи	Планирование, самоконтроль и оценка хода решения [2, с. 15–26; 7, с. 569–572]	Помогает перейти от случайных преобразований к анализу структуры и последовательному плану.
Частично-поисковые задания и карточки-подсказки	Управляемое открытие и педагогическая поддержка [6, с. 11–12]	Сохраняют самостоятельный поиск и ограничивают непродуктивные ходы. Поддерживают обоснованный выбор метода.
Диагностическая рубрика и чек-листы	Формирующее оценивание и явные критерии качества [9–12]	Помогают проверять условия применимости, случай равенства и полноту вывода.
Парные роли «аналитик» и «эксперт»	Взаимооценивание и совместный контроль [11, с. 13–31; 13]	Помогают проговаривать критерии, проверять обоснование метода и замечать логические пропуски.
Групповое восстановление алгоритма и письменная рефлексия	Обобщение способа решения и перенос [1, с. 5–14; 2, с. 15–26]	Помогают выделить общую структуру метода и применить ее в измененной задаче.

Источник: разработано автором.

Для фиксации динамики была разработана диагностическая рубрика «Построение модели решения». Пять показателей были выбраны с учетом этапов решения задачи [1, с. 5–14; 2, с. 15–26] и требований к математическому обоснованию [3, с. 47–49; 4, с. 14].

К ним относятся анализ структуры задачи, выбор метода, план решения, контроль условий применимости и случая равенства, полнота доказательства. Каждый показатель оценивался от 0 до 3 баллов. Максимальный суммарный результат составлял 15 баллов. Результат в 2–3 балла по отдельному показателю рассматривался как достаточный или высокий уровень.

Критерии рубрики были связаны с принятой в исследовании моделью решения и описывали наблюдаемые признаки письменной работы. Такой подход соответствует рекомендациям по использованию аналитических рубрик для оценки сложной учебной деятельности [9, с. 138–140; 10, с. 343–345, 360–363].

Вместе с тем отдельная проверка валидности и надежности рубрики в рамках данного исследования не проводилась. Работы не оценивались независимо двумя экспертами, поэтому согласованность оценок разных экспертов не рассчитывалась. Это ограничение учитывается при интерпретации результатов. Рубрика использовалась прежде всего как диагностический и формирующий инструмент для данной учебной группы. Критерии диагностической рубрики представлены в таблице 3.

Таблица 3. Диагностическая рубрика «Построение модели решения»

Показатель	0 баллов	1 балл	2 балла	3 балла
Анализ структуры задачи	Не выделяет существенные признаки	Видит отдельные признаки	Частично выделяет ключевые признаки	Точно выделяет структуру и ограничения
Выбор метода	Выбор отсутствует или случаен	Метод выбран по внешнему сходству	Метод в целом уместен, но не обоснован	Метод выбран и обоснован
План решения	Начинает с бессистемных действий	Есть отдельные шаги	План намечен, но неполон	Представлена четкая последовательность шагов
Контроль условий и равенства	Условия не проверяются	Проверка фрагментарна	Контролирует часть условий; случай равенства рассмотрен неполно	Полностью проверяет условия применимости и случай равенства
Полнота доказательства	Решение обрывается	Вывод частичный	Доказательство почти завершено	Доказательство полное и связанное

Источник: разработано автором.

Количественный анализ проводился по четырем срезам: на старте, после первого и второго циклов и на итоговом этапе. Для каждого среза рассчитывались средний суммарный балл и число учащихся, получивших 2–3 балла по каждому показателю. Дополнительно определялось изменение доли учащихся от стартовой к итоговой диагностике. Статистические критерии значимости не применялись. Исследование было организовано как Action Research одной учебной группы, а не как эксперимент с контрольной выборкой. Поэтому количественные данные использовались для описания изменений внутри этой группы. Отсутствие контрольной группы не позволяет отделить влияние частично-поискового метода от повторной практики и других факторов учебного процесса. По этой причине различия не интерпретировались как причинный эффект. Качественный анализ включал сопоставление письменных решений, ответов в анкетах и интервью, наблюдений и рефлексивных записей на разных этапах. Сведения из разных источников сравнивались между собой. Это позволяло проверить, подтверждается ли изменение числовых показателей изменениями в структуре рассуждения. Формирующая обратная связь использовалась для корректировки последующей работы учащихся [11, с. 13–31; 12, с. 124–153].

Результаты и их обсуждение. Входная диагностика включала шесть заданий разных типов. В нее вошли нестандартное преобразование, неравенство, сравнение чисел, задача с функциональным подходом, задание на делимость и краткое доказательство в геометрической конфигурации. Цель диагностики состояла не в проверке полного предметного охвата, а в выявлении того, как учащийся организует решение в новой ситуации. На рисунке 1 показана доля учащихся, достигших 2–3 баллов по каждому показателю.



Рисунок 1. Доля учащихся на достаточном и высоком уровнях по показателям стартовой диагностики
Источник: разработано автором.

Средний балл на стартовом этапе составил 6,4 из 15, или 42,7% от максимально возможного результата. Наиболее слабым был контроль условий применимости и случая равенства. В 19 из 24 работ этот компонент отсутствовал либо выполнялся формально. В 16 работах решение начиналось с преобразований без предварительной идеи, а в 15 метод выбирался по внешнему признаку. Например, при наличии квадратных корней учащиеся нередко сразу переходили к возведению в квадрат, даже если такой шаг усложнял дальнейшее доказательство. Доля учащихся, успешно выделявших структуру задачи, составляла 42%, тогда как условия применимости полноценно контролировали 17%. Это показывает, что частичного понимания условия еще было недостаточно для построения последовательного решения.

Анкетирование подтвердило результаты письменной диагностики. Семнадцать из 24 учащихся назвали главным затруднением непонимание того, с чего начинать решение. Пятнадцать отметили, что знают отдельные методы, но затрудняются выбрать подходящий. Только 5 учащихся могли уверенно объяснить, почему выбранный способ применим. Сходство ответов в анкетах и результатов письменных работ позволяет предположить, что проблема была связана не только с запасом методов, но и с организацией самого хода решения.

Поэтому формирующая работа была направлена не на простое увеличение числа известных приемов, а на последовательность действий от анализа структуры задачи к выбору метода, планированию, проверке условий и завершению доказательства. Та же последовательность использовалась при анализе изменений в последующих циклах.

Цикл 1: переход от бессистемных преобразований к каркасу решения

На первом формирующем цикле учащимся предлагалось проговаривать каркас решения до начала вычислений. Его задача состояла в том, чтобы сделать планирование и проверку хода решения явными. Учащиеся последовательно отвечали на пять вопросов.

1. Что дано и какие ограничения существенны?
2. Какие структурные признаки видны в условии?

3. Какие методы потенциально применимы?
4. Какой метод выбран и почему?
5. Где может достигаться равенство или в чем состоит условие корректности?

В первом цикле было проведено шесть занятий по алгебраическим методам. Использовались фронтальные частично-поисковые обсуждения, парная работа, карточки-подсказки и короткие письменные рефлексии. До начала вычислительных преобразований учащиеся должны были кратко записать основную идею. Это позволяло обращать внимание не только на правильность ответа, но и на организацию поиска.

Промежуточный анализ письменных работ после четырех занятий показал положительную динамику. На входной диагностике только 4 из 24 учащихся начинали решение с формулировки идеи или плана. К концу первого цикла таких работ стало 11. Средний балл по рубрике увеличился с 6,4 до 8,2 из 15. Наиболее заметные изменения наблюдались в анализе структуры задачи и выборе метода. По наблюдениям учителя, каркас вопросов помогал учащимся реже начинать со случайных преобразований и давал общий язык для обсуждения решения.

Вместе с тем первый цикл выявил ограничение. Каркас работал лучше в задачах, близких к тем, которые уже разбирались на занятиях, и не всегда помогал распознать метод в измененной формулировке. Стало понятно, что одних направляющих вопросов недостаточно. Учащимся требовалось сравнивать разные способы, проверять решения друг друга и самостоятельно восстанавливать общий алгоритм. Это определило содержание второго цикла.

Цикл 2: перенос способа и групповое восстановление алгоритма

Во втором цикле была усилена парная и групповая работа. В паре использовались роли «аналитик» и «эксперт». Аналитик формулировал существенные признаки задачи, идею и план решения. Эксперт проверял применимость метода, случай равенства и полноту вывода. В групповых заданиях учащимся предлагалось не только решить задачу, но и найти возможный альтернативный метод, указать места, где легко допустить логическую ошибку, и восстановить общий алгоритм для задач данного типа.

Наиболее показательным стал урок по теме «Метод отделяющей касательной при доказательстве неравенств». Он позволил проверить, переносят ли учащиеся общий способ рассуждения в новую ситуацию. Работа начиналась со сравнения через третью величину, затем учащиеся переходили к выбору функции и точки касания. После этого требовалось перевести графическое представление в строгое аналитическое доказательство.

На этапе обсуждения 20 из 24 учащихся корректно сформулировали принцип сравнения через третью величину. В групповых постерах 17 учащихся зафиксировали полный алгоритм метода. В 14 индивидуальных работах решение начиналось с выбора функции и точки касания. На стартовом этапе сопоставимый уровень предварительного планирования наблюдался в 6 работах. Эти данные показывают, что учащиеся стали чаще сначала выбирать математический объект и способ решения, а уже затем выполнять преобразования.

Одновременно сохранялись трудности. Только 10 учащихся самостоятельно довели решение до полного доказательства без подсказки на последнем шаге. Наиболее сложным оказался переход от графической идеи к строгой системе аналитических неравенств и проверке необходимых условий. После этого в обратной связи больше внимания уделялось не только нахождению идеи, но и обоснованию каждого перехода.

После второго цикла средний балл по рубрике составил 10,3 из 15. Быстрее всего менялись показатели, связанные с выбором метода и планом решения. Полнота доказательства улучшалась медленнее. Это различие стало важным результатом исследования, поскольку общий рост балла скрывал неодинаковую динамику отдельных компонентов.

Цикл 3: систематизация результатов в структуре авторской программы

На третьем цикле проверялось, сохраняется ли выработанная последовательность действий при смене предметного содержания. Для анализа использовались решения по многочленам, сравнениям по модулю, геометрическим доказательствам, комбинаторным и игровым задачам. Одновременно результативные приемы систематизировались в структуре

авторской программы. При этом основным предметом статьи оставалась динамика действий учащихся, а не оценка программы как целостного курса.

Итоговая диагностика включала задания, сопоставимые по типу со стартовой работой, но требовала большей самостоятельности. Учащиеся должны были обозначить выбранную стратегию, обосновать применимость метода, проверить ограничения и завершить доказательство. Материалы программы использовались как учебная среда для этой проверки. Полученные результаты не рассматриваются как отдельное доказательство эффективности всей программы.

Результаты трех циклов были использованы для уточнения «Schola Mathematicorum». В программу вошли те приемы, которые в наблюдениях и письменных работах помогали сделать ход решения более последовательным. Тем самым программа стала практическим продолжением исследования, но не его основным объектом.

Итоговая динамика результатов. На рисунке 2 представлено изменение доли учащихся, достигших достаточного и высокого уровня по каждому показателю на четырех этапах. График используется для описания повторных измерений внутри одной группы. Различия не рассматриваются как статистически доказанный причинный эффект.

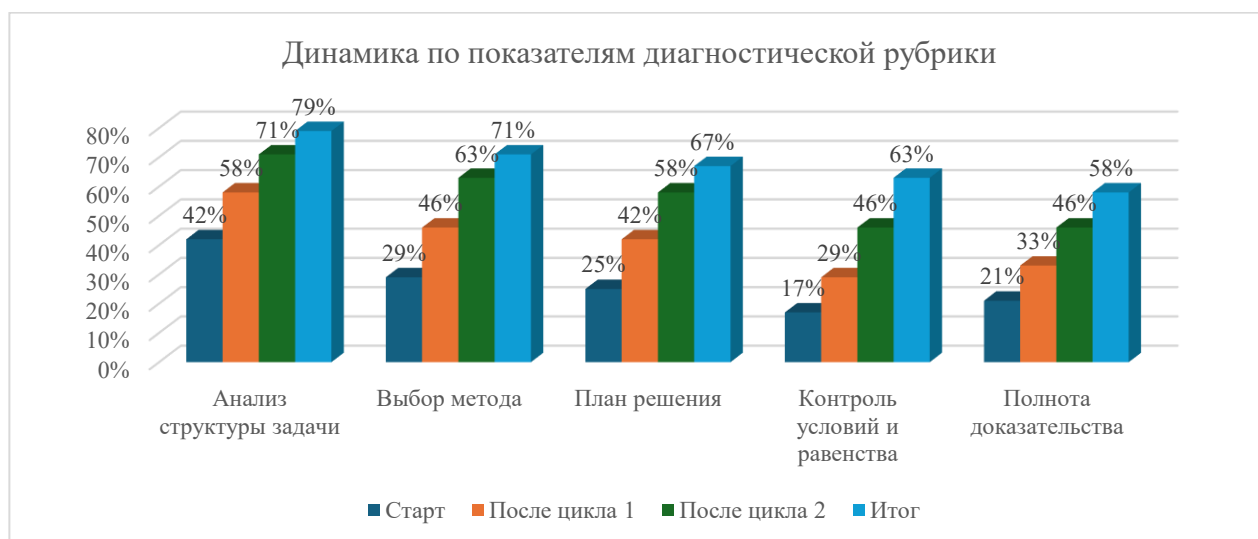


Рисунок 2. Динамика доли учащихся на достаточном и высоком уровнях по показателям рубрики
Источник: разработано автором.

Средний балл увеличился с 6,4 до 11,9 из 15, то есть на 5,5 балла. Доля от максимального результата возросла с 42,7 до 79,3%. По отдельным показателям прирост составил от 37 до 46 процентных пунктов (таблица 4). Число решений без предварительной идеи сократилось с 16 до 5. Число учащихся, способных обосновать применимость выбранного метода, выросло с 5 до 17. Количество работ без проверки условий или случая равенства уменьшилось с 19 до 8. Наибольший прирост наблюдался по контролю условий и составил 46 процентных пунктов. При этом полнота доказательства оставалась самым низким итоговым показателем и достигла 58%. Следовательно, отдельные составляющие навыка развивались с разной скоростью.

Таблица 4. Динамика показателей диагностической рубрики, n (%)

Показатель	Старт	После цикла 1	После цикла 2	Итог	Изменение от старта
Анализ структуры задачи	10 (42)	14 (58)	17 (71)	19 (79)	+37 п.п.
Выбор метода	7 (29)	11 (46)	15 (63)	17 (71)	+42 п.п.
План решения	6 (25)	10 (42)	14 (58)	16 (67)	+42 п.п.
Контроль условий и случая равенства	4 (17)	7 (29)	11 (46)	15 (63)	+46 п.п.
Полнота доказательства	5 (21)	8 (33)	11 (46)	14 (58)	+37 п.п.

Показатель	Старт	После цикла 1	После цикла 2	Итог	Изменение от старта
Средний балл по рубрике	6,4	8,2	10,3	11,9	+5,5 балла

Примечание. Для пяти показателей приведены число учащихся и округленная доля; результат в 2–3 балла соответствует достаточному и высокому уровням; п.п. — процентные пункты.

Источник: разработано автором.

Качественный анализ письменных решений также показал изменения в структуре рассуждения. На старте учащиеся чаще фиксировали первое доступное преобразование. В итоговых работах чаще появлялись выделение существенного признака и краткий план. Выбор метода стал чаще сопровождаться объяснением его применимости. Проверка ограничений и случая равенства стала отдельным шагом решения. Вместе с тем встречались работы, в которых верная идея по-прежнему не доводилась до связного доказательства.

Рефлексия по итогам циклов помогает объяснить наблюдаемую динамику. В первом цикле каркас вопросов прежде всего упорядочил планирование, но перенос на новые формулировки оставался ограниченным. Во втором цикле роль «эксперта» сделала логические пропуски предметом совместного обсуждения. В финальной анкете 18 из 24 учащихся отметили, что теперь чаще начинают с поиска структуры задачи. Шестнадцать учащихся указали, что экспертная роль помогает замечать пропуски в собственных решениях. Пятнадцать назвали полезным формат, в котором нужно восстановить общий алгоритм метода. Эти ответы согласуются с наблюдениями и письменными работами, хотя сами по себе не являются отдельным доказательством эффективности.

Сопоставление полученных результатов с исследованиями позволяет уточнить их смысл. В данной группе выбор метода и планирование улучшались быстрее, чем полнота доказательства. Это согласуется с работами, где отмечается, что использование представлений и аргументов может опережать способность оформить их в строгую доказательную форму [3, с. 47–49; 4, с. 14].

Каркас вопросов сделал планирование, проверку хода решения и итоговую оценку более явными для учащихся. Однако результаты первого цикла показали, что такая опора сама по себе не обеспечивает перенос на новую задачу. Более заметные изменения наблюдались после того, как учащиеся начали сравнивать способы решения, обсуждать ошибки и восстанавливать общий алгоритм. Такое объяснение согласуется с исследованиями управляемого открытия и самоконтроля в процессе математического решения [2, с. 15–26; 6, с. 11–12; 7, с. 569–572].

Диагностическая рубрика задавала понятные критерии качества решения, а роли «аналитик» и «эксперт» переносили эти критерии в парное обсуждение. Исследования по формирующему оцениванию, использованию рубрик и взаимооцениванию показывают, что такие приемы могут поддерживать саморегуляцию и качество учебной работы [9, с. 138–140; 10, с. 360–363; 11, с. 13–31; 12, с. 124–153; 13, с. 484–486].

В нашем исследовании несколько приемов применялись одновременно. Поэтому определить отдельный вклад каждого из них невозможно.

Научный вклад работы состоит в том, что модель олимпиадного решения представлена через пять отдельно наблюдаемых компонентов. Это анализ структуры задачи, выбор метода, планирование, контроль условий и полнота доказательства. Такое разделение позволило увидеть, что положительная динамика по этим компонентам шла неравномерно. Выбор метода и планирование менялись быстрее, тогда как завершение строгого доказательства оставалось более устойчивым затруднением. Этот вывод получен в условиях одной учебной группы и требует проверки на других выборах.

Полученные результаты были использованы при уточнении авторской программы «Schola Mathematicorum». В модули были включены коллективный старт на распознавание структуры задачи, чек-листы минимального стандарта доказательства, парная взаимопроверка и задания на восстановление алгоритма. Эти решения представляют практическое применение результатов исследования и не рассматриваются как самостоятельное доказательство эффективности программы в целом.

Заклучение. Проведенное исследование показало положительную динамику навыка построения модели решения в изученной группе. Учащиеся стали чаще выделять структуру задачи, обосновывать выбор метода, планировать шаги и проверять условия применимости. Средний результат увеличился с 6,4 до 11,9 из 15. Вместе с тем эти изменения следует рассматривать как результат, полученный в конкретной педагогической практике, а не как причинно доказанный эффект одного метода.

Сопоставление циклов показало различную роль использованных приемов. Каркас вопросов прежде всего помогал учащимся начинать с плана, а парная проверка помогала замечать логические пропуски и возвращаться к критериям доказательства. Наиболее устойчивой трудностью осталось завершение строгого аналитического вывода. На итоговом этапе достаточного или высокого уровня по этому показателю достигли 58% учащихся.

Научная новизна исследования заключается в представлении навыка построения модели решения через пять наблюдаемых показателей. К ним относятся анализ структуры задачи, выбор метода, планирование решения, контроль условий применимости и полнота доказательства. Кроме того, показано, что эти компоненты могут изменяться с разной скоростью. Практическая значимость связана с разработанными приемами работы, которые можно использовать в элективных курсах по олимпиадной математике. К ним относятся каркас решения, диагностическая рубрика, чек-листы, парная взаимопроверка и задания на восстановление алгоритма.

Полученные выводы были использованы для совершенствования авторской программы «Schola Mathematicorum». В рамках настоящей статьи программа выступала средой проведения занятий и способом практического применения результатов. Основное внимание сохранялось на изменениях в математическом рассуждении учащихся.

Исследование имеет несколько ограничений. Оно проводилось в одной группе из 24 учащихся без контрольной выборки. Учитель одновременно выполнял роль исследователя. Оценивание работ не проводилось независимо несколькими экспертами, поэтому согласованность оценок разных экспертов не рассчитывалась. Статистические критерии значимости также не применялись. Кроме того, несколько методических приемов использовались одновременно, а повторная диагностика спустя длительное время не проводилась. В дальнейшем целесообразно включить несколько групп и образовательных площадок, организовать независимое оценивание работ двумя экспертами, провести статистический анализ индивидуальных парных данных и предусмотреть отсроченную диагностику переноса навыка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Polya G. How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. 2nd ed. – Princeton, N.J.: Princeton University Press, 2014. – 288 p. [Электронный ресурс] – URL: <https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691164076/how-to-solve-it>
- 2 Schoenfeld A.H. Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint) // Journal of Education. – 2017. – Vol. 196. – No. 2. – P. 1–38. DOI: <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- 3 Stylianides G.J., Stylianides A.J., Moutsios-Rentzos A. Proof and proving in school and university mathematics education research: a systematic review // ZDM Mathematics Education. – 2024. – Vol. 56. – P. 47–59. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y>
- 4 Zengin D., Tapan Broutin M.S. An analysis of gifted students' proof and reasoning process based on the Toulmin model // International Electronic Journal of Mathematics Education. – 2025. – Vol. 20. – No. 4. – Article em0855. DOI: <https://doi.org/10.29333/iejme/17050>
- 5 Kaiser P., Zehnder M. Design features of gifted education in mathematics for secondary school students: A systematic literature review // Frontiers in Education. – 2026. – Vol. 11. – Article 1769788. DOI: <https://doi.org/10.3389/feduc.2026.1769788>

- 6 Alfieri L., Brooks P.J., Aldrich N.J., Tenenbaum H.R. Does Discovery-Based Instruction Enhance Learning? // *Journal of Educational Psychology*. – 2011. – Vol. 103. – No. 1. – P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1037/a0021017>
- 7 Sercenia J.C., Prudente M.S. Effectiveness of the Metacognitive-Based Pedagogical Intervention on Mathematics Achievement: A Meta-Analysis // *International Journal of Instruction*. – 2023. – Vol. 16. – No. 4. – P. 561–578. DOI: <https://doi.org/10.29333/iji.2023.16432a>
- 8 Kemmis S., McTaggart R., Nixon R. *The Action Research Planner: Doing Critical Participatory Action Research*. – Singapore: Springer, 2014. – 200 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-4560-67-2>
- 9 Panadero E., Jonsson A. The Use of Scoring Rubrics for Formative Assessment Purposes Revisited: A Review // *Educational Research Review*. – 2013. – Vol. 9. – P. 129–144. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.01.002>
- 10 Brookhart S.M., Chen F. The Quality and Effectiveness of Descriptive Rubrics // *Educational Review*. – 2015. – Vol. 67. – No. 3. – P. 343–368. DOI: <https://doi.org/10.1080/00131911.2014.929565>
- 11 Panadero E., Andrade H., Brookhart S. Fusing Self-Regulated Learning and Formative Assessment: A Roadmap of Where We Are, How We Got Here, and Where We Are Going // *The Australian Educational Researcher*. – 2018. – Vol. 45. – P. 13–31. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13384-018-0258-y>
- 12 Wiliam D. *Embedded Formative Assessment*. 2nd ed. – Bloomington: Solution Tree Press, 2017. – 278 p. [Электронный ресурс] – URL: <https://eric.ed.gov/?id=ED591904>
- 13 Double K.S., McGrane J.A., Hopfenbeck T.N. The Impact of Peer Assessment on Academic Performance: A Meta-Analysis of Control Group Studies // *Educational Psychology Review*. – 2020. – Vol. 32. – P. 481–509. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09510-3>

REFERENCES

- 1 Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton University Press, 288 p. [Electronic resource] – URL: <https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691164076/how-to-solve-it>
- 2 Schoenfeld, A. H. (2017). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1–38. DOI: <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- 3 Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM Mathematics Education*, 56, 47–59. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y>
- 4 Zengin, D., & Tapan Broutin, M. S. (2025). An analysis of gifted students' proof and reasoning process based on the Toulmin model. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 20(4), em0855. DOI: <https://doi.org/10.29333/iejme/17050>
- 5 Kaiser, P., & Zehnder, M. (2026). Design features of gifted education in mathematics for secondary school students: A systematic literature review. *Frontiers in Education*, 11, 1769788. DOI: <https://doi.org/10.3389/feduc.2026.1769788>
- 6 Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology*, 103(1), 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1037/a0021017>
- 7 Sercenia, J. C., & Prudente, M. S. (2023). Effectiveness of the metacognitive-based pedagogical intervention on mathematics achievement: A meta-analysis. *International Journal of Instruction*, 16(4), 561–578. DOI: <https://doi.org/10.29333/iji.2023.16432a>
- 8 Kemmis, S., McTaggart, R., & Nixon, R. (2014). *The action research planner: Doing critical participatory action research*. Singapore: Springer, 200 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-4560-67-2>

9 Panadero, E., & Jonsson, A. (2013). The use of scoring rubrics for formative assessment purposes revisited: A review. *Educational Research Review*, 9, 129–144. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.01.002>

10 Brookhart, S. M., & Chen, F. (2015). The quality and effectiveness of descriptive rubrics. *Educational Review*, 67(3), 343–368. DOI: <https://doi.org/10.1080/00131911.2014.929565>

11 Panadero, E., Andrade, H., & Brookhart, S. (2018). Fusing self-regulated learning and formative assessment: A roadmap of where we are, how we got here, and where we are going. *The Australian Educational Researcher*, 45, 13–31. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13384-018-0258-y>

12 Wiliam, D. (2017). *Embedded formative assessment* (2nd ed.). Bloomington: Solution Tree Press, 278 p. [Electronic resource] – URL: <https://eric.ed.gov/?id=ED591904>

13 Double, K. S., McGrane, J. A., & Hopfenbeck, T. N. (2020). The impact of peer assessment on academic performance: A meta-analysis of control group studies. *Educational Psychology Review*, 32, 481–509. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09510-3>

*Гульманов Н. К.¹

¹ Қарағанды қаласындағы жаратылыстану-математика бағытындағы Назарбаев Зияткерлік мектебі

¹ Қазақстан, Қарағанды

ЖАРТЫЛАЙ ІЗДЕНІСТІК ӘДІСІ НЕГІЗІНДЕ ОЛИМПИАДАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІ МОДЕЛЬДЕУ ДАҒДЫЛАРЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ

Аңдатпа

Мақалада 10-сынып оқушыларының олимпиадалық математикалық есепті шешу моделін құру дағдысын қалыптастыру мәселесі қарастырылады. Қазіргі зерттеулерде есептің жалпы нәтижесі жиі бағаланады, ал әдісті таңдау, шешімді жоспарлау, қолдану шарттарын тексеру және дәлелдеуді аяқтау сияқты әрекеттердің өзгерісі жеке қарастырылатын жұмыстар аз. Зерттеудің мақсаты — жартылай ізденістік әдіс пен қалыптастырушы бағалауды жүйелі қолдану барысында осы әрекеттердің қалай өзгеретінін анықтау. Зерттеу 2024–2025 оқу жылында 10-сыныптың 24 оқушысынан тұратын бір топта Action Research форматында жүргізілді. Бастапқы және қорытынды диагностика, жазбаша жұмыстарды талдау, сауалнама, жартылай құрылымдалған сұхбат, педагогикалық бақылау және бес көрсеткіштен тұратын диагностикалық рубрика қолданылды. Зерттеу циклдерінде шешу қаңқасы, түрлі деңгейдегі көмек беретін тапсырмалар, жұптық өзара тексеру, алгоритмді топпен қалпына келтіру және қалыптастырушы кері байланыс пайдаланылды. Рубрика бойынша орташа балл 15 балдың 6,4-інен 11,9-ына дейін өсті. Әдісті таңдауын негіздей алатын оқушылар үлесі 29%-дан 71%-ға, қолдану шарттары мен теңдік жағдайын тексеретіндер 17%-дан 63%-ға артты. Толық дәлелдеу көрсеткіші 21%-дан 58%-ға дейін өсті. Жазбаша жұмыстарды талдау әдісті таңдау мен жоспарлау тезірек жақсарғанын, ал қатаң дәлелдеуді аяқтау ең күрделі бөлік болып қалғанын көрсетті. Нәтижелер осы топтағы оң өзгерісті сипаттайды, бірақ бақылау тобы болмағандықтан оларды тек қолданылған әдістің себептік әсері ретінде түсіндіруге болмайды.

Түйінді сөздер: Action Research, олимпиадалық математика, жартылай ізденістік әдіс, шешу моделі, математикалық пайымдау, қалыптастырушы бағалау, теңсіздіктер.

*Gulmanov N.¹

¹ Nazarbayev Intellectual school of Science and Mathematics in Karagandy

¹ Kazakhstan, Karagandy

FORMATION OF SKILLS IN MODELING OLYMPIAD PROBLEM SOLVING BASED ON THE PARTIAL SEARCH METHOD

Annotation

The article examines the development of Grade 10 students' skill in constructing a solution model for olympiad mathematics problems. Existing research often reports overall problem-solving success, while changes in method selection, planning, checking conditions, and completing a proof are less often examined separately. The study aimed to trace changes in these components during systematic use of the partial-search method and formative assessment. The study was conducted as Action Research with one group of 24 Grade 10 students during the 2024–2025 academic year. Data were collected through initial and final diagnostic tasks, written solutions, questionnaires, semi-structured interviews, classroom observation, and a five-indicator diagnostic rubric. The research cycles used a solution framework, tasks with varying degrees of support, peer checking, group reconstruction of solution algorithms, and formative feedback. The mean rubric score increased from 6.4 to 11.9 out of 15. The proportion of students able to justify method

selection rose from 29% to 71%, while the proportion checking conditions of applicability and equality cases rose from 17% to 63%. The proportion presenting a complete proof increased from 21% to 58%. Analysis of written work showed that method selection and planning improved more quickly than the completion of a rigorous proof. The findings describe positive changes within this group, but the absence of a control group does not allow the changes to be attributed solely to the pedagogical approach.

Keywords: Action Research, olympiad mathematics, partial-search method, solution model, mathematical reasoning, formative assessment, inequalities.

Поступила: 13.05.2026

Одобрена после рецензирования: 10.09.2026

Принята к публикации: 25.09.2026